2026-10-30 作业

1. 设 A 为 Noether 环，I 为 A 的理想，M, N 均为有限 A-模。证明：
   (i) 有 $\widehat{A}$-模同构 $\widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{N} \simeq \widehat{M \otimes_A N}$，其中完备化均指在 I 处的完备化。
   (ii) 有 $\widehat{A}$-模同构 $\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(\widehat{M}, \widehat{N}) \simeq \widehat{\mathrm{Hom}_A(M, N)}$。
2. 设 A 为 Noether 环，I 为 A 的理想，设 $\widehat{A}$ 为 A 在 I 处的完备化。记 $\widehat{\widehat{A}}$ 为 $\widehat{A}$ 在 $I\widehat{A}$ 处的完备化。证明有环同构 $\widehat{\widehat{A}} \simeq \widehat{A}$。
3. 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 Noether 环之间的环同态，设 M 为有限 B-模。通过 φ 将 M 也看作 A-模。证明 $\mathrm{Ass}_A(M) = \varphi^*(\mathrm{Ass}_B(M))$。其中 $\varphi^*\colon \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ 为 φ 诱导的素谱空间的映射。