2026-10-23 作业

1. 设 M 为有限 A-模，I 为 A 的理想。证明：
   (i) $\sqrt{\mathrm{ann}_A(M/IM)} = \sqrt{\mathrm{ann}_A(M) + I}$。
   (ii) $\mathrm{Supp}_A(M/IM) = \mathrm{Supp}_A(M) \cap V(I)$。
2. 设 A 为 Noether 环，I 为 A 的理想，M 为有限 A-模。设 $\{N_i\}_{i\geq 0}$ 为一族 M 的子模，满足对任意 $i \geq 0$，均有 $N_i \subset I^i M$ 且 $IN_i \subset N_{i+1}$。证明：存在 $c \geq 0$，使得对任意 $i \geq c$，均有 $N_i = I^{i-c} N_c$。
3. 设 (A, m) 为 Noether 局部环，M_1, M_2, M_3 为有限 A-模。设 $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$，$\psi\colon M_2 \longrightarrow M_3$ 为 A-模同态，并且对任意 $i \geq 1$，

$$M_1 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\varphi\otimes 1} M_2 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\psi\otimes 1} M_3 \otimes_A (A/m^i)$$

   在 $M_2 \otimes_A (A/m^i)$ 处正合。证明：$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 在 M_2 处正合。