2026-09-24 作业

1. 设 A 为 Noether 环，并且对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$，局部化 A_P 均为整环。证明 A 为有限个整环的乘积。

2. 设 A 为 Noether 环，$X = \operatorname{Spec} A$. 我们称 X 的一个子集 Z 为局部闭子集，如果对任意 $x \in Z$，存在 x 在 X 中的开邻域 U，使得 $Z \cap U$ 为 U 的闭子集。称 X 的子集 W 为**可构造子集**，如果 W 可以写为有限个局部闭子集的并。

   (a) 证明：X 的子集 Z 为局部闭子集 $\iff$ 存在 X 的开子集 U 和 X 的闭子集 F，使得 $Z = U \cap F$.

   (b) 在欧式空间 $\mathbb{R}^2$ 中举出一个不是局部闭子集的可构造子集的例子。

   (c) 证明可构造子集的有限交、有限并和补集均为可构造子集。

   (d) 设 W 为 X 的子集。证明 W 为 X 的可构造子集 $\iff$ 存在 X 的闭子集形成的有限降链

   $$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} = \varnothing,$$

   以及 $F_i \setminus F_{i+1}$ 的稠密开子集 U_i，$i = 1, \ldots, n$，使得 $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

   (e) 设 W 为 X 的可构造子集。证明 W 包含其闭包 $\overline{W}$ 的一个稠密开子集。

   (f) 设 W 为 X 的可构造子集。证明 W 为 X 的开子集 $\iff$ 对任意 $Q \in W$，对任意满足 $P \subset Q$ 的 A 的素理想 P，均有 $P \in W$。