

2026-09-11 作业

1. 设 A 为环, $f \in A$ 。证明

$$f \in A^* \iff \forall P \in \operatorname{Spec} A, f \in A_P^* \iff \forall P \in \operatorname{Spec} A, f(P) \neq 0.$$

2. (局部化的另一种表示) 设 A 为环, $S \subset A$ 为乘法子集。记 $A[X_s \mid s \in S]$ 为以 $\{X_s\}_{s \in S}$ 为一族彼此独立的未定元的多项式环。证明存在 A -代数同构

$$A_S \cong \frac{A[X_s \mid s \in S]}{(sX_s - 1 \mid s \in S)},$$

其中同构由自然映射 $A \longrightarrow A_S$ 以及 $X_s \longmapsto s^{-1}$ ($s \in S$) 诱导。